Bibliografía del programa

Básica

- Beer, F. P., Johnston, E. R. y Clausen, W. E. *Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica*, 8.ª ed. México: McGraw-Hill, 2007.
- Meriam, J. L. y Kraige, L. G. *Mecánica para ingenieros. Dinámica*, 3.ª ed. Barcelona: Reverté, 2000.
- Hibbeler, R. C. *Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica*, 10.ª ed. México: Pearson Prentice Hall, 2004.

Complementaria

- Riley, W. F. *Ingeniería mecánica. Dinámica.* Barcelona: Reverté, 2004.
- Bedford, A. y Fowler, W. L. *Mecánica para ingeniería. Dinámica*, 5.ª ed. México: Pearson Educación, 2008.
- Boresi, A. P. y Schmidt, R. J. *Ingeniería mecánica. Dinámica.* México: Thomson, 2001.

La notación de este cuaderno (componentes normal y tangencial, $U_{1\to2} = \Delta T + \Delta V$, $\sum M_G = \bar{I}\alpha$, radio de giro $\bar{k}$) es la de las resoluciones publicadas de los exámenes.

Momentos respecto a G en el límite de volcar (las distancias en pulgadas):

$$N(10) - F(15) - T(5) = 0 \;\Rightarrow\; T = \frac{1558.8 - 467.7}{5} = 218.2\,\text{lb}.$$

A lo largo del plano:

$$218.2 - 180\sin 30^\circ - 31.18 = \frac{180}{32.2}\,a \;\Rightarrow\; a = \frac{97.06}{5.590} = 17.36\,\text{ft/s}^2.$$

Cuerpo B (baja con la misma aceleración): $W_B - T = \dfrac{W_B}{32.2}\,a$, de donde

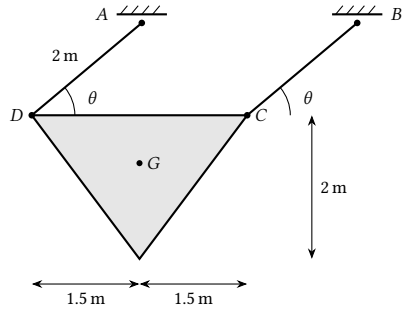
$$W_B = \frac{T}{1 - a/g} = \frac{218.2}{1 - 17.36/32.2} = 473.6\,\text{lb}.$$

Resultado. $W_{B,\mathbf{max}} = 474\,\text{lb}$ y $a = 17.4\,\text{ft/s}^2$ hacia arriba del plano (tensión $T = 218\,\text{lb}$).

Ejercicio 5.5.3 · Placa colgada de dos barras paralelas

Adaptado de: 1er final 2012-2, versión A, problema 4

Una placa triangular homogénea de 40 kg tiene su lado superior DC horizontal, de 3 m, y su tercer vértice 2 m debajo del punto medio de DC. Cuelga de dos barras paralelas AD y BC de 2 m y masa despreciable, articuladas en el techo en A y B ($AB = DC$). La placa se suelta del reposo cuando las barras forman un ángulo $\theta = 40^\circ$ con la horizontal. Para esa posición, determine: a) la tensión de cada barra; b) la aceleración del centro de masa de la placa.



Datos. $m = 40\,\text{kg}$, barras de 2 m, $DC = 3\,\text{m}$, altura del triángulo 2 m, $\theta = 40^\circ$, $\omega = 0$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. $ABCD$ es un paralelogramo: la placa no gira, está en **traslación curvilínea**. Todos sus puntos tienen la aceleración de D, que describe una circunferencia de radio 2 m alrededor de A. Como parte del reposo, $\bar{a}_n = 0$ y $\bar{a} = \bar{a}_t$, perpendicular a las barras. Ejes: n a lo largo de las barras (hacia el techo) y t perpendicular, hacia abajo y a la derecha, a 50° bajo la horizontal. G está a $\frac{1}{3}(2) = 0.667\,\text{m}$ debajo de DC, en la vertical del punto medio. Las barras solo transmiten fuerza axial (T_A en D, T_B en C, en la dirección de 40°).

baja $(0.375 - 0.075)\alpha = 0.3\alpha$. Con esa relación, $\alpha = 5.23\,\text{rad/s}^2$, la tensión es 21.0 N y $\bar{a} = 0.392\,\text{m/s}^2$ (publicado: $4.85\,\text{rad/s}^2$, 20.4 N y $0.364\,\text{m/s}^2$).

1er final 2011-1, versión C, problema 4: En la resolución publicada se encierra como resultado $N_A = 0.235P$, pero la expresión de la que sale, $(5 + 2.795)P/24$, vale $0.325P$, que es el valor que la misma resolución usa después (fricción $0.227P$).

1er final 2011-2, versión B, problema 4: En la resolución publicada se usa $\bar{I} = 117.9\,\text{kg m}^2$; el momento de inercia centroidal de la placa es $\frac{1}{12}(300)(4^2 + 2.5^2) = 556.3\,\text{kg m}^2$. Con ese valor, $\alpha = 2.65\,\text{rad/s}^2$ y $R_A = 1680\,\text{N}$ (publicado: $3.29\,\text{rad/s}^2$ y 1572 N).

2º final 2018-1, problema 4: En la resolución publicada el momento de inercia respecto al punto de contacto se escribe $\frac{2}{5}m + 0.2^2 m = 0.44m$; falta el factor $r^2 = 0.04$ en el primer término. El valor correcto es $\frac{7}{5}mr^2 = 0.28\,\text{kg m}^2$, con el que $\alpha = 9.81\,\text{rad/s}^2$, $\bar{a} = 1.962\,\text{m/s}^2$ y la distancia es 3.92 m (publicado: 0.99 m).

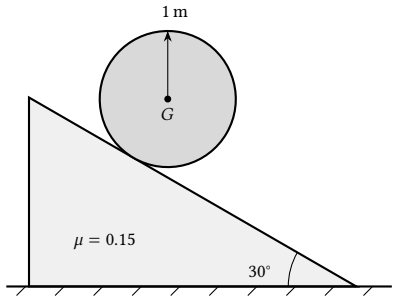
$$R = \sqrt{9.2^2 + 8^2} = 12.19\,\text{lb}.$$

Resultado. $\alpha = 13.8\,\text{rad/s}^2$ en sentido antihorario; $R_O = 12.2\,\text{lb}$ ($R_x = 8\,\text{lb}$ hacia la derecha, $R_y = 9.2\,\text{lb}$ hacia arriba).

Ejercicio 5.5.5 · Esfera en un plano: ¿rueda o desliza?

Adaptado de: 2º final 2009-2, versión A, problema 4

Una esfera homogénea de 50 kg y 1 m de radio se suelta desde el reposo sobre un plano inclinado a 30° con la horizontal. El coeficiente de fricción, tanto estático como cinético, es 0.15. Determine si rueda o no sin deslizar, su aceleración angular, la aceleración de su centro de masa y la magnitud de la fuerza de fricción que el plano ejerce sobre la esfera.



Datos. $m = 50\,\text{kg}$, $r = 1\,\text{m}$, $\theta = 30°$, $\mu_s = \mu_k = 0.15$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$, $\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2 = 20\,\text{kg m}^2$.

Planteamiento. Movimiento plano general: se supone que rueda y se comprueba. Ejes: x a lo largo del plano, hacia abajo; y perpendicular. La fricción F actúa hacia arriba del plano y hace girar la esfera en sentido horario (positivo).

$$mg\sin\theta - F = m\bar{a}, \qquad N - mg\cos\theta = 0, \qquad Fr = \bar{I}\alpha.$$

Resolución. Normal: $N = 50(9.81)\cos 30° = 424.8\,\text{N}$; fricción disponible: $\mu_s N = 63.7\,\text{N}$.
Suposición: rueda sin deslizar ($\bar{a} = \alpha r$). De la ecuación de momentos, $F = \bar{I}\bar{a}/r^2 = \frac{2}{5}m\bar{a}$; sustituyendo:

$$\bar{a} = \tfrac{5}{7}g\sin 30° = 3.504\,\text{m/s}^2,$$

$$F = mg\sin 30° - m\bar{a} = 245.3 - 175.2 = 70.1\,\text{N}.$$

Comprobación: $70.1\,\text{N} > 63.7\,\text{N}$: la fricción necesaria excede la disponible, **la esfera desliza**. (Equivale a $\mu_s = 0.15 < \frac{2}{7}\tan 30° = 0.165$.)
Con deslizamiento, $F = \mu_k N = 63.7\,\text{N}$:

$$\bar{a} = 9.81\sin 30° - \frac{63.7}{50} = 3.63\,\text{m/s}^2, \qquad \alpha = \frac{Fr}{\bar{I}} = \frac{63.7(1)}{20} = 3.19\,\text{rad/s}^2.$$

Comprobación del sentido: $\bar{a} - \alpha r = 0.44 > 0$, el punto de contacto resbala hacia abajo del plano y la fricción apunta hacia arriba, como se supuso.

Apéndice C · Fe de erratas

↑ Volver al índice

Diferencias entre las resoluciones publicadas de los exámenes y los valores verificados en este cuaderno.

C.1 · Unidad 1 · Cinemática de la partícula: rectilíneo, tiro parabólico y componentes normal y tangencial

1er final 2011-2, versión B, problema 1: La resolución publicada integra $a = -0.15v^2$ en lugar de $a = -15v^2$ del enunciado y obtiene $s = 22.2\,\text{in}$, $v = 1.286\,\text{in/s}$, $a = -0.248\,\text{in/s}^2$; con el dato del enunciado, los valores verificados son $s = 0.527\,\text{in}$, $v = 0.0133\,\text{in/s}$, $a = -0.002\,66\,\text{in/s}^2$.

1er final 2015-1, versión A, problema 1: En la resolución publicada aparece $R = 50t$ y $a = 54.3\,\text{ft/s}^2$; con la velocidad horizontal de 5 ft/s del enunciado, $R = 5t$ y el valor verificado es $a = 4.07\,\text{ft/s}^2$.

1er final 2013-1, versión A, problema 2: En la resolución publicada aparece $\ddot{s} = 48.74\,\text{ft/s}^2$ en B y, en consecuencia, $a_B = 538\,\text{ft/s}^2$ a 50.2°; con $a_t = 3t^2$, el valor verificado es $a_t = 73.1\,\text{ft/s}^2$ y $a_B = 541\,\text{ft/s}^2$ a 52.8° sobre la horizontal.

Extraordinario 2009-2, problema 1: En la resolución publicada aparece $x = 0.858 \times 10^{-3}t^4 + 7t + 36$ y k en m/s^4; el valor verificado del coeficiente es $k/12 = 6.859 \times 10^{-3}\ \text{ft/s}^4$ (con el valor publicado, $x(9) \neq 144\,\text{ft}$).

1er final 2018-1, turno vespertino, problema 1: En la resolución publicada se usa una altura de lanzamiento de 1.5 m y aparece $v_0 = 6.45\,\text{ft/s}$ a 59.7°; con la altura de 1.2 m de la figura del enunciado y en las unidades de los datos, el valor verificado es $v_0 = 6.66\,\text{m/s}$ a 60.8°.

C.2 · Unidad 2 · Cinética de la partícula: segunda ley con fricción, cuerpos conectados y movimiento curvilíneo

1er final 2018-2, turno matutino, problema 2: En la resolución publicada aparece $\phi = \arctan 0.4 = 21.30°$ y $v = 200\,\text{km/h}$; el valor verificado es $\phi = 21.80°$ y $v = 201.5\,\text{km/h}$ (la diferencia en la rapidez es menor que 1 %).

1er final 2012-2, versión A, problema 2: En la resolución publicada aparece $F = 500g/1.5 = 6540\,\text{N}$; el valor verificado es $F = 500(9.81)/1.5 = 3270\,\text{N}$ (error aritmético en la última división).

1er final 2015-2, versión A, problema 1: En la resolución publicada aparece $T = 59.84g - 400a_B$, $a_B = 1.126\,\text{m/s}^2$ y $v_A = 4.24\,\text{m/s}$; el valor verificado es $T = 44.0g - 400a_B$, $a_B = 0.749\,\text{m/s}^2$ y $v_A = 3.46\,\text{m/s}$ (la fricción se tomó como $0.2(0.8g)$ en lugar de $0.2(80g)$).

2º final 2009-2, versión B, problema 2: En la resolución publicada aparece $\omega = 2.09\,\text{rad/s}$, calculada con un radio de giro de 1.3 m; el valor verificado es $\omega = 2.84\,\text{rad/s}$, con $r = 0.3 + 0.8\sin 30° = 0.7\,\text{m}$ según las cotas de la figura. La tensión, 577 N, es correcta.

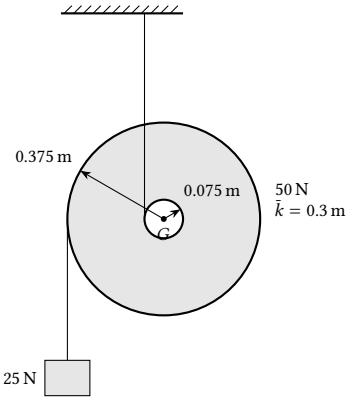
en sentido antihorario. Comprobación del sentido: el punto de contacto tiene $a = 4.85 + 0.4(2.91) = 6.0\,\text{m/s}^2$ hacia la derecha; resbala hacia la derecha y la fricción apunta a la izquierda, como se supuso.

Resultado. El carrete **desliza**; $\bar{a} = 4.85\,\text{m/s}^2$ hacia la derecha.

Ejercicio 5.5.7 · Carrete que cuelga de su cubo

Adaptado de: 2º final 2015-2, problema 4

Un carrete de 50 N tiene un radio de giro centroidal $\bar{k} = 0.3\,\text{m}$. Su cubo, de 0.075 m de radio, está enrollado en una cuerda vertical sujeta al techo, que baja tangente al lado izquierdo del cubo. Del lado izquierdo del disco exterior, de 0.375 m de radio, cuelga un cuerpo de 25 N mediante otra cuerda enrollada. Determine la tensión de la cuerda que sostiene al cuerpo de 25 N, la aceleración angular del carrete y la aceleración de su centro de masa G.



Datos. $W = 50\,\text{N}$, $\bar{k} = 0.3\,\text{m}$, $r_i = 0.075\,\text{m}$, $r_e = 0.375\,\text{m}$, $W_C = 25\,\text{N}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. El carrete está en **movimiento plano general**. $m = 5.097\,\text{kg}$, $\bar{I} = m\bar{k}^2 = 0.4587\,\text{kg m}^2$, $m_C = 2.548\,\text{kg}$. Tensiones: T_{techo} en la cuerda del techo y T_C en la del cuerpo. Positivo antihorario y hacia arriba para el carrete.

Cinemática. El punto del cubo tangente a la cuerda fija no se acelera verticalmente: $\bar{a} = r_i\alpha = 0.075\alpha$ (hacia arriba si el giro es antihorario). El punto del disco exterior del que cuelga el cuerpo está a $r_e - r_i = 0.3\,\text{m}$ a la izquierda de esa cuerda, así que el cuerpo baja con

$$a_C = (0.375 - 0.075)\alpha = 0.3\alpha.$$

Resolución. Cuerpo (positivo hacia abajo), carrete en y y momentos respecto a G (T_C, a 0.375 m a la izquierda, hace momento antihorario; T_{techo}, a 0.075 m a la izquierda, horario):

$$\begin{aligned} 25 - T_C &= 2.548(0.3\alpha) = 0.7645\alpha, \\ T_{\text{techo}} - T_C - 50 &= 5.097(0.075\alpha) = 0.3823\alpha, \\ 0.375\,T_C - 0.075\,T_{\text{techo}} &= 0.4587\alpha. \end{aligned}$$

- **Versión B:** (1) péndulo, tensión [U2 y U3; ejercicio 2.5.6]; (2) resortes y bucles [U3; ejercicio 3.5.3]; (3) banda y poleas, alfa función de omega [U4; ejercicio 4.5.2]; (4) carrete con fricción [U5; ejercicio 5.5.6].
- **Versión C:** (1) tiro desde rampa [U1]; (2) persecución [U1]; (3) resortes y trayectoria [U3]; (4) barra y disco con fricción [U5].

2º final 2015-2

- **Versión única:** (1) cuerpos conectados, energía [U3; ejercicio 3.5.5]; (2) resorte en tubo [U3; ejercicio 3.5.2]; (3) placa con aceleración angular variable [U4; ejercicio 4.5.1]; (4) carrete con cuerpo colgante [U5; ejercicio 5.5.7].

1er final 2018-1

- **Turno matutino:** (1) componentes normal y tangencial en pista circular [U1; ejemplo 1.4]; (2) cuerpos conectados con fricción [U2; ejercicio 2.5.4]; (3) mecanismo de cuatro articulaciones [U4; ejemplo 4.4]; (4) polea doble con cuerpos colgantes [U5; ejemplo 5.4].
- **Turno vespertino:** (1) tiro parabólico [U1; propuesto 1.6.5]; (2) trabajo y energía, cuerpos conectados [U3; propuesto 3.6.3]; (3) mecanismo de cuatro articulaciones [U4]; (4) volante con cuerpo colgante [U5; propuesto 5.6.1].

2º final 2018-1

- **Versión única:** (1) persecución en línea recta [U1]; (2) trabajo y energía con fricción por tramos [U3; ejemplo 3.4]; (3) barra con collarín y perno en ranura [U4; propuesto 4.6.5]; (4) esfera que rueda sin deslizar [U5; propuesto 5.6.5].

1er final 2018-2

- **Turno matutino:** (1) gráfica v-t de ascensor [U1; propuesto 1.6.4]; (2) curva peraltada con fricción [U2; ejemplo 2.4]; (3) resorte en plano inclinado [U3; propuesto 3.6.1]; (4) carrete que se desenrolla [U5; propuesto 5.6.2].
- **Turno vespertino:** (1) gráfica a-t [U1; ejercicio 1.5.3]; (2) trayectoria circular, fuerza normal [U2 y U3; propuesto 2.6.4]; (3) choque con pérdida de energía [U3; ejercicio 3.5.8]; (4) mecanismo articulado [U4].

2º final 2018-2

- **Versión única:** (1) movimiento uniformemente acelerado [U1]; (2) plano inclinado con fricción [U2; propuesto 2.6.1]; (3) collarín y varilla, velocidades [U4; ejercicio 4.5.7]; (4) disco frenado por barra con fricción [U5].

B.2 Tres exámenes completos para simulacro

Resuelve cada uno en 2 horas, sin consultar y con el formulario del Apéndice A escrito de memoria en una hoja aparte. Después califícate con las resoluciones del cuaderno.

Simulacro 1: 1er final 2015-1, versión A

1. Cinemática de la partícula: bolsa que cae sobre un camión que acelera. Resuelto en el ejercicio 1.5.4.
2. Trabajo y energía: bloque que se desliza con fricción y comprime un resorte. Resuelto en el ejercicio 3.5.1.
3. Cinemática del cuerpo rígido: dos discos en contacto unidos a barras. Resuelto en el ejercicio 4.5.4.
4. Cinética del cuerpo rígido: viga que se iza sin girar (traslación). Resuelto en el ejercicio 5.5.1.

5.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio propuesto 5.6.1 · Volante con un cuerpo colgado

Adaptado de: 1er final 2018-1, turno vespertino, problema 4

Un volante de 250 lb y 40 in de diámetro gira sin fricción alrededor de un eje fijo que pasa por su centro; el radio de giro centroidal de su masa es de 15 in. Un cuerpo A de 30 lb cuelga de una cuerda enrollada en el borde del volante y se suelta desde el reposo. Determine: a) la aceleración del cuerpo A; b) la tensión de la cuerda.

Resultado: a) $a_A = 5.66\,\text{ft/s}^2$ hacia abajo; b) $T = 24.7\,\text{lb}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

Ejercicio propuesto 5.6.2 · Carrete que se desenrolla al caer

Adaptado de: 1er final 2018-2, turno matutino, problema 4

Un carrete de 20 kg, con radio de giro centroidal de 0.25 m, radio exterior de 0.3 m y radio interior de 0.1 m, tiene enrollada en su cubo (radio interior) una cuerda vertical cuyo extremo está fijo en el techo. Se suelta desde el reposo. Determine la longitud de cuerda que se desenrolla en tres segundos.

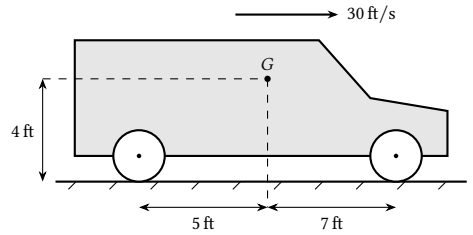
Resultado: $s = 6.09\,\text{m}$ ($\bar{a} = 1.353\,\text{m/s}^2$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

Ejercicio propuesto 5.6.3 · Camioneta que frena con las ruedas bloqueadas

Adaptado de: 1er final 2011-1, versión C, problema 4

Una camioneta de peso P avanza a 30 ft/s cuando se aplican de golpe los frenos y sus cuatro ruedas dejan de girar; patina 20 ft antes de detenerse. Su centro de masa G está a 4 ft del suelo, 7 ft detrás del eje delantero y 5 ft delante del eje trasero. Determine la magnitud de la reacción normal y de la fuerza de fricción en cada rueda.



Resultado: Cada rueda delantera: $N = 0.325P$, $F = 0.227P$; cada rueda trasera: $N = 0.175P$, $F = 0.122P$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 5.6.4 · Placa que pierde un pasador

Adaptado de: 1er final 2011-2, versión B, problema 4

Una placa rectangular homogénea de 300 kg, de 4 m de ancho y 2.5 m de alto, cuelga

- **Versión A:** (1) caída libre [U1]; (2) péndulo, componente tangencial y tensión [U2]; (3) impulso con fuerza variable [U3]; (4) barra con fuerza y par [U5; ejercicio 5.5.8].
- **Versión B:** (1) distancia de frenado en rampa [U2; ejercicio 2.5.1]; (2) tobogán y tiro parabólico [U3; ejercicio 3.5.4]; (3) impulso promedio [U3; propuesto 3.6.5]; (4) mecanismo manivela-biela-corredera [U4].

2º final 2009-2

- **Versión A:** (1) impulso con fuerza variable [U3]; (2) tobogán circular, normal [U2]; (3) cuerda elástica [U3; propuesto 3.6.2]; (4) esfera: ¿rueda o desliza? [U5; ejercicio 5.5.5].
- **Versión B:** (1) gráfica v-t, curvas a-t y x-t [U1]; (2) juego giratorio, tensión [U2; ejercicio 2.5.7]; (3) poleas con aceleración angular variable [U4]; (4) barra articulada liberada [U5].

Extraordinario 2009-2

- **Versión única:** (1) aceleración función del tiempo [U1; propuesto 1.6.2]; (2) plano inclinado con fricción [U2]; (3) impulso con fuerza variable [U3]; (4) manivela-biela-corredera [U4].

2º final 2010-1

- **Versión A:** (1) movimiento dependiente con poleas [U1; ejercicio 1.5.8]; (2) gráfica de rapidez en rampa [U1]; (3) resorte y cuerpos conectados [U3]; (4) barra que desliza en piso y pared [U5].
- **Versión B:** (1) bloques con fricción [U2; ejercicio 2.5.3]; (2) pista circular, normal [U2]; (3) impulso con fuerza variable y fricción [U3; propuesto 3.6.4]; (4) barra colgada de cuerdas (traslación curvilínea) [U5].

1er final 2011-1

- **Versión A:** (1) movimiento rectilíneo con gráfica a-t [U1]; (2) cinética curvilínea (volantín) [U2; propuesto 2.6.5]; (3) placa con extremos en guías [U4]; (4) camioneta remolcada (traslación) [U5].
- **Versión B:** (1) radio de curvatura [U1]; (2) impulso con fuerza variable [U3]; (3) poleas con aceleración angular variable [U4; propuesto 4.6.1]; (4) barra articulada (rotación) [U5].
- **Versión C:** (1) tiro horizontal desde avión [U1]; (2) trabajo y energía con resorte [U3]; (3) manivela-biela-corredera [U4; propuesto 4.6.3]; (4) camioneta frenando (traslación) [U5; propuesto 5.6.3].

1er final 2011-2

- **Versión A:** (1) movimiento rectilíneo por tramos [U1]; (2) trabajo y energía con resorte [U3]; (3) mecanismo de cuatro articulaciones [U4]; (4) péndulo compuesto (rotación) [U5].
- **Versión B:** (1) aceleración función de la velocidad [U1; ejercicio 1.5.2]; (2) trabajo y energía con resortes [U3]; (3) barra en ranuras guiadas [U4; ejercicio 4.5.6]; (4) placa suspendida, pasador roto (rotación) [U5; propuesto 5.6.4].
- **Versión C:** (1) tiro vertical [U1]; (2) impulso (motociclista) [U3; ejemplo 3.4]; (3) engrane y cremallera [U4; ejercicio 4.5.3]; (4) bloque que desliza sin volcar (traslación) [U5; ejercicio 5.5.2].

1er final 2012-1

- **Versión A:** (1) partículas conectadas [U2]; (2) bloque remolcado con fricción [U2]; (3) trabajo y energía con resorte [U3]; (4) cilindro que rueda sin deslizar [U5].
- **Versión B:** (1) tiro horizontal sobre ladera [U1]; (2) frenado de embarcación [U3]; (3) impulso con fuerza variable y fricción [U3; ejercicio 3.5.7]; (4) volante que rueda, momento de inercia [U5].

2º final 2012-1

- **Versión única:** (1) cuerpos conectados con fricción [U2; propuesto 2.6.2]; (2) péndulo, tensión [U2 y U3; propuesto 2.6.6]; (3) cono en rotación [U4]; (4) disco con cuerpo colgante [U5].

1er final 2012-2

- **Versión A:** (1) tiro parabólico entre planos [U1]; (2) automóvil y remolque frenando [U2; ejercicio 2.5.2]; (3) barra con extremos guiados [U4]; (4) placa colgada de barras (traslación curvilínea) [U5; ejercicio 5.5.3].

5.7 Errores frecuentes

- **Tomar momentos respecto a un punto cualquiera con $\bar{I}\alpha$.** $\sum M = \bar{I}\alpha$ vale respecto a G; respecto a un eje fijo O se usa $I_O = \bar{I} + m\bar{r}^{\,2}$. Respecto a otro punto aparece además el momento de $m\bar{a}$.
- **Olvidar la masa en el teorema de los ejes paralelos** o sumar d^2 a $\bar{k}$: es $I = \bar{I} + md^2$, con $\bar{I} = m\bar{k}^2$.
- **Usar el peso como masa.** Si el dato está en N o en lb, primero $m = W/g$.
- **Suponer que rueda sin comprobar.** Con μ_s y μ_k en el enunciado hay que calcular la fricción necesaria y compararla con $\mu_s N$. El criterio $\mu < \tan\theta$ es el de un bloque, no el de una rueda.
- **Usar $F = \mu N$ cuando rueda sin deslizar.** Si no desliza, la fricción es una incógnita más; solo vale $\mu_k N$ cuando hay deslizamiento.
- **Relaciones cinemáticas mal planteadas en carretes.** En un carrete que sube o baja por una cuerda fija, el centro no está quieto: un punto a una distancia d de esa cuerda tiene $a = d\alpha$, no $r\alpha$.
- **Una sola tensión para dos cuerdas.** En una polea con masa, la tensión cambia de un lado al otro; cada cuerda lleva su T_A, T_B.
- **Normal en el centro de la base en problemas de volcamiento.** En el límite de volcar, la normal está en la arista de giro, y la fricción y la cuerda también hacen momento respecto a G.
- **Olvidar $\bar{a}_n = \bar{r}\omega^2$** al calcular las reacciones de un pasador cuando el cuerpo ya gira.

5.8 Formulario de emergencia de la unidad

Concepto	Expresión
Movimiento plano	$\sum F_x = m\bar{a}_x$, $\sum F_y = m\bar{a}_y$, $\sum M_G = \bar{I}\alpha$
Eje fijo O	$\sum M_O = I_O\alpha$, $I_O = \bar{I} + m\bar{r}^{\,2}$; $\bar{a}_t = \bar{r}\alpha$, $\bar{a}_n = \bar{r}\omega^2$
Traslación	$\alpha = 0$: $\sum M_G = 0$
Radio de giro	$\bar{I} = m\bar{k}^2$; $I = \bar{I} + md^2$
Barra	$\frac{1}{12}mL^2$ (centro), $\frac{1}{3}mL^2$ (extremo)
Disco, aro, esfera	$\frac{1}{2}mr^2$, mr^2, $\frac{2}{5}mr^2$
Placa $a \times b$	$\frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
Rodadura	$\bar{v} = \omega r$, $\bar{a} = \alpha r$, $F \le \mu_s N$; si desliza, $F = \mu_k N$
Rueda en plano	$\bar{a} = g\sin\theta/(1 + \bar{k}^2/r^2)$
Carrete en cuerda fija	$\bar{a} = r_{\text{cubo}}\,\alpha$
Energía	$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$; eje fijo: $T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$
Trabajo	par: $M\Delta\theta$; $U_{1\to2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

5.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Clasifica el movimiento: traslación, rotación con eje fijo o movimiento plano general (tabla de la sección 5.2).
2. Calcula $m = W/g$ y $\bar{I} = m\bar{k}^2$ (o de la tabla); si hay eje fijo, I_O.
3. Dibuja un diagrama de cuerpo libre por cuerpo, con las fuerzas en su punto de aplicación.
4. Escribe las relaciones cinemáticas ($\bar{a} = \alpha r$, $a_A = r_A\alpha$) antes de las ecuaciones de

A.7 Constantes y conversiones

Magnitud	Valor
Gravedad	$g = 9.81\,\text{m/s}^2 = 32.2\,\text{ft/s}^2$
Longitud	$1\,\text{ft} = 12\,\text{in} = 0.3048\,\text{m}$; $1\,\text{mi} = 5280\,\text{ft} = 1609\,\text{m}$
Fuerza	$1\,\text{lb} = 4.448\,\text{N}$; $1\,\text{kgf} = 9.81\,\text{N}$
Masa	$1\,\text{slug} = 1\,\text{lb}\,\text{s}^2/\text{ft} = 14.59\,\text{kg}$; $m = W/g$
Rapidez	$1\,\text{km/h} = \frac{1}{3.6}\,\text{m/s}$; $1\,\text{mi/h} = 1.4667\,\text{ft/s}$
Potencia	$1\,\text{hp} = 550\,\text{ft lb/s} = 745.7\,\text{W}$
Ángulo	$1\,\text{rev} = 2\pi\,\text{rad}$; $1\,\text{rpm} = 0.104\,72\,\text{rad/s}$

Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

Reúne los formularios de emergencia de las cinco unidades. Signos: positivo en el sentido elegido para cada eje y, para giros, positivo en sentido antihorario salvo que se indique otro.

A.1 Cinemática de la partícula (Unidad 1)

Movimiento rectilíneo.

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

- Uniforme: $x = x_0 + vt$.
- Uniformemente acelerado: $v = v_0 + at$, $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$.
- $a(t)$: integrar $\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$. $a(v)$: $\mathrm{d}t = \mathrm{d}v/a$ o $\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}v/a$. $a(x)$: $v\,\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}x$.
- Gráficas: Δv = área bajo a-t; Δx = área bajo v-t; la pendiente de x-t es v y la de v-t es a.
- Encuentro: misma posición en el mismo instante, $x_A(t) = x_B(t)$.

Tiro parabólico (origen en el punto de lanzamiento, y hacia arriba):

$$x = v_0\cos\theta\, t, \qquad y = v_0\sin\theta\, t - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad v_y = v_0\sin\theta - gt$$

$$y = x\tan\theta - \frac{g\,x^2}{2v_0^2\cos^2\theta}, \qquad h_{\text{máx}} = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}, \qquad R = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}\ \text{(mismo nivel)}$$

Componentes normal y tangencial.

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \qquad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \qquad \vec{a} = a_t\,\hat{e}_t + a_n\,\hat{e}_n$$

$$\rho = \frac{\left[1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2\right]^{3/2}}{|\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2|}, \qquad \rho = \frac{v^3}{|\vec{v}\times\vec{a}|}$$

En el punto más alto de un tiro, $a_n = g$ y $\rho = v_x^2/g$.

Movimiento relativo y dependiente. $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$, $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$. Con poleas: la longitud de cada cuerda es constante, $\sum s_i = \text{cte}$, de donde $\sum v_i = 0$ y $\sum a_i = 0$.

A.2 Cinética de la partícula (Unidad 2)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}, \qquad \sum F_x = ma_x, \qquad \sum F_y = ma_y$$

$$\sum F_t = m\,a_t = m\,v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \qquad \sum F_n = m\frac{v^2}{\rho}\ \text{(hacia el centro de curvatura)}$$

- Fricción: sin deslizar $F_r \le \mu_s N$; deslizando $F_r = \mu_k N$, opuesta a la velocidad relativa.
- Curva peraltada un ángulo θ sin fricción: $\tan\theta = v^2/(g\rho)$.

Resolución. Dirección tangencial (las tensiones no tienen componente):

$$mg\cos 40^\circ = m\bar{a}_t \;\Rightarrow\; \bar{a}_t = 9.81\cos 40^\circ = 7.51\,\text{m/s}^2.$$

Dirección normal:

$$T_A + T_B - mg\sin 40^\circ = m\bar{a}_n = 0 \;\Rightarrow\; T_A + T_B = 252.2\,\text{N}.$$

Momentos respecto a G (positivo antihorario). D está en $(-1.5,\ 0.667)$ y C en $(1.5,\ 0.667)$ respecto a G; con $M = xF_y - yF_x$:

$$\begin{aligned} &T_A\,[-1.5\sin 40^\circ - 0.667\cos 40^\circ] \\ +\,&T_B\,[1.5\sin 40^\circ - 0.667\cos 40^\circ] = 0, \\ &-1.475\,T_A + 0.4535\,T_B = 0. \end{aligned}$$

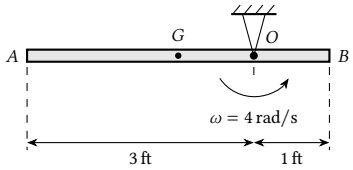
Entonces $T_B = 3.252\,T_A$ y $4.252\,T_A = 252.2$.

Resultado. a) $T_{AD} = 59.3\,\text{N}$ y $T_{BC} = 192.9\,\text{N}$ (tensión). b) $\bar{a} = 7.51\,\text{m/s}^2$, hacia abajo y a la derecha, a 50° bajo la horizontal.

Ejercicio 5.5.4 · Barra que gira alrededor de un pasador

Adaptado de: 1er final 2015-1, versión B, problema 4

La barra delgada homogénea AB, de 16.1 lb y 4 ft de longitud, gira alrededor de un eje horizontal que pasa por O, a 3 ft de A y 1 ft de B. En la posición mostrada la barra está horizontal y tiene una rapidez angular de 4 rad/s en sentido antihorario. Con $\bar{I} = \frac{1}{12}mL^2$, determine para ese instante la aceleración angular de la barra y la magnitud de la reacción de la articulación O sobre ella.



Datos. $W = 16.1\,\text{lb}$, $L = 4\,\text{ft}$, $\bar{r} = OG = 3 - 2 = 1\,\text{ft}$, $\omega = 4\,\text{rad/s}$, $g = 32.2\,\text{ft/s}^2$.

Planteamiento. Rotación alrededor de un eje fijo no centroidal. $m = 16.1/32.2 = 0.5\,\text{slug}$. $\bar{I} = \frac{1}{12}(0.5)(4)^2 = 0.6667\,\text{slug ft}^2$; $I_O = 0.6667 + 0.5(1)^2 = 1.1667\,\text{slug ft}^2$. G está a la izquierda de O: el peso hace girar la barra en sentido antihorario. Componentes de $\bar{a}$: tangencial $\bar{r}\alpha$ (vertical) y normal $\bar{r}\omega^2$ (horizontal, de G hacia O, a la derecha).

Resolución.

$$\sum M_O = I_O\alpha: \quad 16.1(1) = 1.1667\,\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = 13.8\,\text{rad/s}^2.$$

$\bar{a}_t = 1(13.8) = 13.8\,\text{ft/s}^2$ hacia abajo; $\bar{a}_n = 1(4)^2 = 16\,\text{ft/s}^2$ hacia la derecha. Con la reacción R_x, R_y en O:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum F_y = m\bar{a}_y: &\quad R_y - 16.1 = -0.5(13.8) \;\Rightarrow\; R_y = 9.2\,\text{lb}, \\ \textstyle\sum F_x = m\bar{a}_x: &\quad R_x = 0.5(16) = 8\,\text{lb}. \end{aligned}$$

Apéndice D · Fuentes

↑ Volver al índice

Programa de la asignatura

Programa de estudio de *Cinemática y Dinámica* (clave 0066, tercer semestre, 9 créditos), Facultad de Ingeniería, UNAM, aprobado por su Consejo Técnico el 19 de noviembre de 2008. De él se tomaron el orden de las unidades, el objetivo del curso y el objetivo literal de cada unidad.

Exámenes

Exámenes finales colegiados y extraordinario de la asignatura publicados con su resolución, de 2007-2 a 2018-2: 38 primeros finales, 14 segundos finales y 1 extraordinario, que corresponden a 27 aplicaciones distintas y suman 200 problemas. En cada ejercicio de este cuaderno se cita el examen del que se adaptó con la forma «1er final 2015-1, versión A, problema 3». Los enunciados están redactados de nuevo, las figuras están redibujadas y las resoluciones son propias.

Periodo	Examen	Versiones	Problemas
2007-2	1er final	única	3
2007-2	2º final	única	3
2008-1	1er final	A, B	3
2008-1	2º final	A, B	3
2008-2	1er final	A, B	3
2008-2	2º final	A, B	3
2009-1	1er final	A, B	3
2009-2	1er final	A, B	4
2009-2	2º final	A, B	4
2009-2	Extraordinario	única	4
2010-1	2º final	A, B	4
2011-1	1er final	A, B, C	4
2011-2	1er final	A, B, C	4
2012-1	1er final	A, B	4
2012-1	2º final	única	4
2012-2	1er final	A, B, C	4
2013-1	1er final	A, B	4
2013-1	2º final	única	4
2013-2	1er final	A	4
2014-2	1er final	A, B, C, D	4
2015-1	1er final	A, B, C, D	4
2015-2	1er final	A, B, C	4
2015-2	2º final	única	4
2018-1	1er final	turnos matutino y vespertino	4
2018-1	2º final	única	4
2018-2	1er final	turnos matutino y vespertino	4
2018-2	2º final	única	4

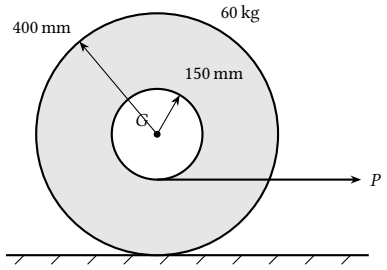
Duración: dos horas y media hasta 2012-2 y dos horas desde 2013-1 (el extraordinario de 2009-2 ya era de dos horas).

Resultado. No rueda sin deslizar; $\alpha = 3.19\,\text{rad/s}^2$ (horario), $\bar{a} = 3.63\,\text{m/s}^2$ hacia abajo del plano y $F = 63.7\,\text{N}$.

Ejercicio 5.5.6 · Carrete jalado por un cable: suponer y comprobar

Adaptado de: 1er final 2015-2, versión B, problema 4

Un carrete de 60 kg tiene un radio exterior de 400 mm y un momento de inercia de masa respecto a su centro G de $1.35\,\text{kg m}^2$. Descansa sobre un suelo horizontal; los coeficientes de fricción estática y cinética entre el carrete y el suelo son 0.3 y 0.27. Del punto más bajo de su cubo, de 150 mm de radio, sale un cable enrollado del que se tira con una fuerza horizontal constante $P = 450\,\text{N}$ hacia la derecha. Encuentre la aceleración del centro de masa G.



Datos. $m = 60\,\text{kg}$, $R = 0.4\,\text{m}$, $r = 0.15\,\text{m}$, $\bar{I} = 1.35\,\text{kg m}^2$, $\mu_s = 0.3$, $\mu_k = 0.27$, $P = 450\,\text{N}$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Movimiento plano general. Fuerzas: P a 0.15 m debajo de G, hacia la derecha; peso; normal N y fricción F (supuesta hacia la izquierda) en el contacto, a 0.4 m debajo de G. Momentos respecto a G, positivo antihorario: P da $+0.15P$ y F da $-0.4F$.

$$P - F = m\bar{a}, \qquad N = mg = 588.6\,\text{N},$$
$$0.15P - 0.4F = \bar{I}\alpha_{\text{antihorario}}.$$

Resolución. *Suposición: rueda sin deslizar.* Si G avanza a la derecha, el carrete gira en sentido horario: $\alpha_{\text{antihorario}} = -\bar{a}/0.4$.

$$67.5 - 0.4F = -1.35\,\frac{\bar{a}}{0.4} = -3.375\,\bar{a}, \qquad F = 450 - 60\bar{a}.$$

$$67.5 - 180 + 24\bar{a} = -3.375\,\bar{a} \;\Rightarrow\; \bar{a} = \frac{112.5}{27.375} = 4.110\,\text{m/s}^2, \quad F = 203.4\,\text{N}.$$

Comprobación: $\mu_s N = 0.3(588.6) = 176.6\,\text{N} < 203.4\,\text{N}$: **el carrete desliza**.
Con deslizamiento, $F = \mu_k N = 0.27(588.6) = 158.9\,\text{N}$:

$$\bar{a} = \frac{450 - 158.9}{60} = 4.85\,\text{m/s}^2, \qquad \alpha = \frac{67.5 - 0.4(158.9)}{1.35} = 2.91\,\text{rad/s}^2$$

C.3 · Unidad 3 · Trabajo y energía, impulso y cantidad de movimiento de la partícula

2º final 2015-2, problema 2: En la resolución publicada aparece $H = 26.7\,\text{cm}$; el valor verificado es $H = 20 + 6250/981 = 26.4\,\text{cm}$. La rapidez publicada en P, 227 cm/s, sí corresponde a 26.4 cm.

1er final 2012-1, versión B, problema 3: En la resolución publicada aparece $t = 93.4\,\text{s}$; el valor verificado es $t = 93.9\,\text{s}$. La resolución publicada toma la fuerza neta como cero en el arranque ($t = 0.5\,\text{s}$), pero en ese instante la fricción pasa de 25 N (estática) a 20 N (cinética) y la fuerza neta vale 5 N; el impulso neto hasta 10 s es 1678.8 N s, no 1667.5 N s.

1er final 2018-2, turno vespertino, problema 3: En la resolución publicada las velocidades aparecen en ft/s; los datos están en m/s, así que los valores verificados son 1.377 m/s y 0.123 m/s (los números coinciden; solo cambian las unidades).

1er final 2018-2, turno matutino, problema 3: En la resolución publicada aparece 4.74 m/s para la rapidez al llegar al suelo; el valor verificado es 4.80 m/s. La energía del resorte (0.015 J) se devuelve al cuerpo y debe sumarse, no restarse.

C.4 · Unidad 4 · Cinemática del cuerpo rígido: rotación, rodadura y mecanismos

1er final 2018-1, turno matutino, problema 3: La resolución publicada usa $\omega_{AB} = 2.5\,\text{rad/s}$ ($v_B = 2\,\text{m/s}$) en lugar de los 10 rad/s del enunciado, y obtiene $\omega_{BC} = 2.5\,\text{rad/s}$, $\omega_{CD} = 5\,\text{rad/s}$, $\alpha_{BC} = 14.43\,\text{rad/s}^2$ y $\alpha_{CD} = 36.1\,\text{rad/s}^2$. Con 10 rad/s los valores verificados son 10 rad/s, 20 rad/s, 230.9 rad/s^2 y 577.4 rad/s^2 (las velocidades escalan por 4 y las aceleraciones por 16); los sentidos no cambian.

1er final 2015-2, versión A, problema 3: En la resolución publicada se toma el radio como 0.5 m (es el diámetro) y se obtiene $\omega = 20\,\text{rad/s}$; con $r = 0.25\,\text{m}$ el valor verificado es $\omega = 40\,\text{rad/s}$. Las velocidades pedidas ($v_A = 20\,\text{m/s}$, $v_B = 10\,\text{m/s}$, $v_O = 0$) no cambian.

2º final 2018-1, problema 3: En la resolución publicada aparece $\omega_{AB} = 5.77\,\text{rad/s}$; el valor verificado es $\omega_{AB} = 0.577\,\text{rad/s}$ (8/13.86, con el CIR a 13.86 ft de A). La velocidad de B publicada, 6.93 ft/s, es correcta.

C.5 · Unidad 5 · Cinética del cuerpo rígido: traslación, rotación y movimiento plano general

2º final 2009-2, versión A, problema 4: En la resolución publicada se decide que la esfera desliza comparando $\mu = 0.15$ con $\tan 30°$, que es el criterio de un bloque, y se rotula $N = 63.7\,\text{N}$. La normal es 424.8 N y 63.7 N es la fricción. El criterio para la esfera es $\mu_s \geq \frac{2}{7}\tan 30° = 0.165$; como $0.15 < 0.165$, la conclusión (desliza) y los valores $\bar{a} = 3.63\,\text{m/s}^2$, $\alpha = 3.19\,\text{rad/s}^2$ y $F = 63.7\,\text{N}$ son correctos.

2º final 2015-2, problema 4: En la resolución publicada la aceleración del cuerpo de 25 N se toma como 0.375α. Como el centro del carrete sube 0.075α mientras gira, el cuerpo

De las dos primeras, $T_C = 25 - 0.7645\alpha$ y $T_{\text{techo}} = 75 - 0.3823\alpha$. En la tercera:

$$9.375 - 0.2867\alpha - 5.625 + 0.0287\alpha = 0.4587\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{3.75}{0.7167} = 5.23\,\text{rad/s}^2.$$

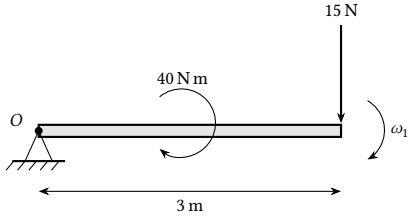
$$T_C = 25 - 0.7645(5.23) = 21.0\,\text{N}, \qquad \bar{a} = 0.075(5.23) = 0.392\,\text{m/s}^2.$$

Resultado. $T_C = 21.0\,\text{N}$, $\alpha = 5.23\,\text{rad/s}^2$ en sentido antihorario y $\bar{a} = 0.392\,\text{m/s}^2$ hacia arriba (el cuerpo baja con $1.57\,\text{m/s}^2$).

Ejercicio 5.5.8 · Barra con un par: rapidez angular tras una vuelta

Adaptado de: 1er final 2009-2, versión A, problema 4

Una barra esbelta de 4 kg y 3 m está articulada en su extremo O y se mueve en un plano vertical. Sobre ella actúan un par de 40 N m en sentido horario y una fuerza de 15 N aplicada en el extremo libre, siempre perpendicular a la barra y en el sentido del giro. Cuando la barra está horizontal tiene una velocidad angular $\omega_1 = 6\,\text{rad/s}$ en sentido horario. Determine su velocidad angular cuando haya girado 360°.



Datos. $m = 4\,\text{kg}$, $L = 3\,\text{m}$, $M = 40\,\text{N m}$, $F = 15\,\text{N}$ a $d = 3\,\text{m}$ de O, $\omega_1 = 6\,\text{rad/s}$, $\Delta\theta = 2\pi$, $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

Planteamiento. Rotación alrededor de un eje fijo; se pide una rapidez después de un giro: **energía del cuerpo rígido**. $I_O = \frac{1}{3}mL^2 = \frac{1}{3}(4)(3)^2 = 12\,\text{kg m}^2$. Tras una vuelta completa G vuelve a la misma altura: $\Delta V_g = 0$.

$$U_{1\to 2} = \Delta T, \qquad U_{1\to 2} = M\Delta\theta + Fd\,\Delta\theta.$$

Resolución.

$$U_{1\to 2} = 40(2\pi) + 15(3)(2\pi) = 251.3 + 282.7 = 534.1\,\text{J}.$$

$$T_{\text{ini}} = \tfrac{1}{2}(12)(6)^2 = 216\,\text{J}, \qquad T_{\text{fin}} = 216 + 534.1 = 750.1\,\text{J} = \tfrac{1}{2}(12)\,\omega_2^2.$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2(750.1)}{12}} = 11.18\,\text{rad/s}.$$

La misma respuesta sale de $\sum M_O = I_O\alpha$, con $\alpha = 7.08 + 4.91\cos\theta$, integrando $\omega\,\mathrm{d}\omega = \alpha\,\mathrm{d}\theta$ de 0 a 2π: el término del peso se anula en la vuelta completa.

Resultado. $\omega_2 = 11.2\,\text{rad/s}$ en sentido horario.

Simulacro 2: segundo final 2015-2

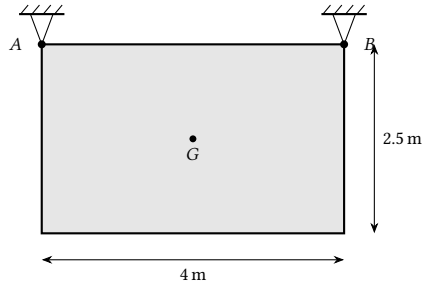
1. Trabajo y energía: cuerpos conectados con una polea móvil. Resuelto en el ejercicio 3.5.5.
2. Conservación de la energía: esfera que cae, entra en un tubo en U y comprime un resorte. Resuelto en el ejercicio 3.5.2.
3. Cinemática del cuerpo rígido: placa con aceleración angular variable. Resuelto en el ejercicio 4.5.1.
4. Cinética del cuerpo rígido: carrete que cuelga de su cubo con un cuerpo colgante. Resuelto en el ejercicio 5.5.7.

Simulacro 3: 1er final 2018-1, turno matutino

1. Cinemática de la partícula: corredor que acelera en una pista circular. Resuelto en el ejemplo 1.4.
2. Cinética de la partícula: dos cuerpos conectados con fricción. Resuelto en el ejercicio 2.5.4.
3. Cinemática del cuerpo rígido: mecanismo de cuatro articulaciones. Resuelto en el ejemplo 4.4.
4. Cinética del cuerpo rígido: polea doble con dos cuerpos colgantes. Resuelto en el ejemplo 5.4.

Como cuarto simulacro sirve cualquier otra versión de estos mismos exámenes (por ejemplo el 1er final 2015-1, versiones B a D, o el turno vespertino de 2018-1), que el cuaderno no resuelve completos.

de dos pasadores A y B en sus esquinas superiores. De pronto se rompe el pasador B. Determine la aceleración angular de la placa y la magnitud de la reacción en el pasador A justo después de romperse el de B.



Resultado: $\alpha = 2.65\,\text{rad/s}^2$ (horario); $R_A = 1680\,\text{N}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 5.6.5 · Esfera que rueda por una pendiente

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 4

Sobre un plano cuya pendiente es 7/24 se suelta desde el reposo una esfera maciza de 5 kg y 0.2 m de radio. Sabiendo que la esfera rueda sin deslizar, diga qué distancia recorre su centro de masa durante los dos primeros segundos de su movimiento.

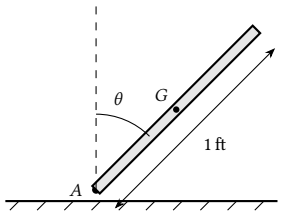
Resultado: $x = 3.92\,\text{m}$ ($\bar{a} = 1.962\,\text{m/s}^2$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

Ejercicio propuesto 5.6.6 · Barra que cae girando alrededor de su base

Adaptado de: 2º final 2008-2, versión A, problema 3

Una barra homogénea y esbelta de masa m y 1 ft de longitud está articulada en su extremo inferior A, sobre el suelo. Se libera del reposo cuando forma un ángulo $\theta = 45°$ con la vertical. Calcule su velocidad angular cuando $\theta = 90°$ (barra horizontal).



Resultado: $\omega = 8.26\,\text{rad/s}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

- **Versión B:** (1) conservación de la energía [U3]; (2) trabajo y energía con fricción [U3]; (3) disco unido a barras [U4]; (4) cilindro con cuerpo colgante [U5].
- **Versión C:** (1) superficie circular, punto de despegue [U2 y U3]; (2) paquetes en plano inclinado [U3]; (3) fuerza constante para detener [U3]; (4) cilindro que rueda con cuerda [U5].

1er final 2013-1

- **Versión A:** (1) movimiento uniformemente acelerado [U1]; (2) componentes normal y tangencial en circunferencia [U1; ejercicio 1.5.7]; (3) trabajo y energía con fricción [U3]; (4) collarín en brazo giratorio [U4].
- **Versión B:** (1) movimiento uniformemente acelerado [U1]; (2) tiro parabólico sobre terreno curvo [U1; ejercicio 1.5.6]; (3) trabajo y energía con resorte y fricción [U3]; (4) collarín en brazo giratorio [U4; ejercicio 4.5.5].

2º final 2013-1

- **Versión única:** (1) frenado en curva, fuerza de fricción [U2; propuesto 2.6.3]; (2) trabajo y energía (atracción acuática) [U3]; (3) mecanismo de cuatro articulaciones [U4; propuesto 4.6.4]; (4) cilindros que ruedan en plano inclinado [U5].

1er final 2013-2

- **Versión A:** (1) fuerza variable con fricción (impulso) [U3; ejercicio 3.5.6]; (2) montaña rusa, fuerza normal [U2 y U3]; (3) mecanismo de cuatro articulaciones [U4]; (4) caja sobre plataforma acelerada (volcamiento) [U5].

1er final 2014-2

- **Versión A:** (1) dos cuerpos en plano inclinado [U2]; (2) resbaladilla circular, despegue [U2 y U3; ejercicio 2.5.8]; (3) trabajo y energía con resorte [U3]; (4) cilindro que rueda con cuerpo colgante [U5].
- **Versión B:** (1) alcance entre dos vehículos [U1; ejercicio 1.5.1]; (2) tiro horizontal sobre pendiente [U1; ejercicio 1.5.5]; (3) placa en rotación pura [U4]; (4) engranes con par [U5].
- **Versión C:** (1) tiro parabólico [U1]; (2) bastidor giratorio, rapidez máxima [U2]; (3) resortes y caída [U3]; (4) disco ranurado con cuerpo colgante [U5].
- **Versión D:** (1) tiro parabólico desde rampa [U1]; (2) componentes normal y tangencial en curva vertical [U1]; (3) choque, cantidad de movimiento y fricción [U3; propuesto 3.6.6]; (4) cilindro con cuerpo en plano inclinado [U5].

1er final 2015-1

- **Versión A:** (1) caída y camión acelerado [U1; ejercicio 1.5.4]; (2) trabajo y energía con resorte [U3; ejercicio 3.5.1]; (3) discos en contacto, velocidades y aceleraciones [U4; ejercicio 4.5.4]; (4) viga izada sin girar (traslación) [U5; ejercicio 5.5.1].
- **Versión B:** (1) alcance entre vehículos [U1; propuesto 1.6.3]; (2) tiro parabólico, dos ángulos [U1]; (3) collarín con resorte [U3]; (4) barra que gira (rotación) [U5; ejercicio 5.5.4].
- **Versión C:** (1) movimiento uniformemente acelerado [U1]; (2) trabajo y energía con resorte y fricción [U3]; (3) mecanismo, velocidades angulares [U4]; (4) rueda unida a cuerpo en plano inclinado [U5].
- **Versión D:** (1) movimiento uniformemente acelerado [U1; propuesto 1.6.1]; (2) trabajo y energía, cuerpos conectados [U3]; (3) resorte y tiro parabólico [U3]; (4) mecanismo, velocidades angulares [U4].

1er final 2015-2

- **Versión A:** (1) cuerpos conectados con fricción [U2; ejercicio 2.5.5]; (2) esquiador en curva [U2 y U3]; (3) rodadura de bicicleta [U4; propuesto 4.6.2]; (4) cilindro sobre dos planos (reacciones y alfa) [U5].

movimiento.
5. Escribe $\sum F = m\bar{a}$ y $\sum M_G = \bar{I}\alpha$ (o $\sum M_O = I_O\alpha$) con un solo sentido positivo.
6. Si hay fricción con μ_s: supón que rueda y comprueba $F \leq \mu_s N$.
7. Si se pide una rapidez tras un giro, usa energía; si se pide una fuerza en esa posición, regresa a las ecuaciones de movimiento.
8. Da el resultado con unidades y sentido.

Apéndice B · Exámenes completos

↑ Volver al índice

B.1 Qué vino en cada examen

Los 53 exámenes publicados de 2007-2 a 2018-2, agrupados por aplicación. Para cada problema se indica el tema y, entre corchetes, la unidad (U1 a U5) y, si está en este cuaderno, el ejemplo, ejercicio resuelto o ejercicio propuesto donde se trabaja. Las versiones del mismo examen suelen ser el mismo problema con otros datos: si una versión está resuelta en el cuaderno, la otra se puede usar como práctica con el mismo procedimiento.

1er final 2007-2

- **Versión única:** (1) tiro parabólico, componentes normal y tangencial [U1]; (2) trabajo y energía con resorte [U3]; (3) polea doble con cuerpos colgantes [U5].

2º final 2007-2

- **Versión única:** (1) encuentro de dos tiros [U1]; (2) collarín con resorte [U3]; (3) polea doble con cuerpos colgantes [U5].

1er final 2008-1

- **Versión A:** (1) impulso con fuerza variable y fricción [U3]; (2) tiro vertical con viento [U1]; (3) caja en banda (traslación) [U5].
- **Versión B:** (1) impulso con fuerza variable y fricción [U3]; (2) tiro parabólico, normal y tangencial [U1]; (3) caja empujada (traslación) [U5].

2º final 2008-1

- **Versión A:** (1) frenado, coeficiente de fricción [U2]; (2) péndulo simple [U2 y U3]; (3) placa colgada de barras (traslación curvilínea) [U5].
- **Versión B:** (1) plano inclinado con fricción [U2]; (2) collarín con resorte [U3]; (3) cilindro que rueda con cuerda y cuerpo [U5].

1er final 2008-2

- **Versión A:** (1) segunda ley con fricción [U2]; (2) collarines con resorte [U3]; (3) disco con cuerpo colgante [U5].
- **Versión B:** (1) impulso y cantidad de movimiento [U3]; (2) collarín con resorte [U3]; (3) disco que rueda sin deslizar [U5].

2º final 2008-2

- **Versión A:** (1) partículas conectadas con poleas [U2]; (2) collarín entre resortes [U3]; (3) barra liberada (rotación) [U5; propuesto 5.6.6].
- **Versión B:** (1) bloques con fricción [U2]; (2) movimiento relativo de automóviles [U1; propuesto 1.6.6]; (3) collarines con resorte [U3].

1er final 2009-1

- **Versión A:** (1) plano inclinado y tiro parabólico [U2]; (2) automóvil, aceleración máxima (traslación) [U5]; (3) trabajo y energía con fricción y resorte [U3].
- **Versión B:** (1) partículas conectadas con fricción [U2]; (2) collarín con tres resortes [U3]; (3) aro: ¿rueda o desliza? [U5].

1er final 2009-2

- Con fricción, rapidez máxima: $v_{\text{máx}}^2 = g\rho\,\dfrac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}$; mínima: cambiar el signo de μ_s, válido si $\mu_s < \tan\theta$; si $\mu_s \geq \tan\theta$, la fricción sostiene el reposo y $v_{\text{mín}} = 0$.
- Despegue de una superficie o tensión nula en una cuerda: $N = 0$ (o $T = 0$).
- Cuerpos conectados: un DCL por cuerpo y la relación de aceleraciones de la cuerda.

A.3 Trabajo y energía (Unidad 3)

$$U_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}, \qquad T = \tfrac{1}{2}mv^2, \qquad V_g = Wy = mgy, \qquad V_e = \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

donde $U_{1\to 2}$ es el trabajo de las fuerzas que no tienen energía potencial (fricción, fuerzas aplicadas) y x es la deformación del resorte, no su longitud.

- Trabajo de la fricción: $U = -\mu_k N\, s$ (por tramos si N o μ_k cambian).
- Conservación: si $U_{1\to 2} = 0$, entonces $T_A + V_A = T_B + V_B$.
- Resorte de longitud natural L_0 entre puntos fijos: $x = L - L_0$, con L calculada con Pitágoras.
- Potencia: $P = \vec{F}\cdot\vec{v}$; eficiencia $\eta = P_{\text{sal}}/P_{\text{ent}}$.

A.4 Impulso y cantidad de movimiento (Unidad 3)

$$m\vec{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t = m\vec{v}_2, \qquad \int F\,\mathrm{d}t = \text{área bajo la gráfica } F\text{-}t, \qquad F_{\text{prom}} = \frac{m\,\Delta v}{\Delta t}$$

- Arranque con fricción: el cuerpo se mueve desde el instante t_0 en que $F(t_0) = \mu_s N$; el impulso se integra desde t_0, con $\mu_k N$.
- Choque de dos partículas (sin fuerzas externas impulsivas): $m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$.
- Coeficiente de restitución: $e = \dfrac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$; plástico $e = 0$, elástico $e = 1$.
- Energía perdida en el choque: $\Delta T = T_{\text{antes}} - T_{\text{después}}$.

A.5 Cinemática del cuerpo rígido (Unidad 4)

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

- α constante: $\omega = \omega_0 + \alpha t$, $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$, $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$.
- Punto a distancia r del eje: $v = \omega r$, $a_t = \alpha r$, $a_n = \omega^2 r$; $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$, $\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} - \omega^2\vec{r}$.
- Transmisión (engranes, bandas, contacto sin deslizar), en magnitud: $r_A|\omega_A| = r_B|\omega_B|$ y $r_A|\alpha_A| = r_B|\alpha_B|$. El sentido va aparte: engranes en contacto exterior giran en sentidos opuestos; banda abierta o contacto interior, en el mismo sentido.
- Rodadura sin deslizar: $v_G = \omega r$, $a_G = \alpha r$; el punto de contacto tiene velocidad nula.
- 1 rev $= 2\pi$ rad; 1 rpm $= 2\pi/60$ rad/s.

Movimiento plano general.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}_{B/A}, \qquad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}\times\vec{r}_{B/A} - \omega^2\vec{r}_{B/A}$$

$$\hat{k}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}, \qquad \hat{k}\times\hat{\jmath} = -\hat{\imath}$$

CIR: intersección de las perpendiculares a las velocidades de dos puntos; $v_P = \omega\, r_{P/\text{CIR}}$. El CIR sirve para velocidades, no para aceleraciones.

Movimiento relativo a un sistema que gira (collarín en una barra que gira con Ω):

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P'} + \vec{v}_{P/\text{barra}}, \qquad \vec{a}_P = \vec{a}_{P'} + \vec{a}_{P/\text{barra}} + 2\vec{\Omega}\times\vec{v}_{P/\text{barra}}$$

A.6 Cinética del cuerpo rígido (Unidad 5)

$$\sum F_x = m\bar{a}_x, \qquad \sum F_y = m\bar{a}_y, \qquad \sum M_G = \bar{I}\alpha$$

- Traslación: $\alpha = 0$, así que $\sum M_G = 0$.
- Rotación alrededor de un eje fijo O: $\sum M_O = I_O\alpha$; $\sum F_n = m\bar{r}\omega^2$, $\sum F_t = m\bar{r}\alpha$.
- Momento respecto a un punto cualquiera P: $\sum M_P = \bar{I}\alpha +$ momento de $m\bar{a}$ respecto a P.
- Rueda: suponer que no desliza ($\bar{a} = \alpha r$), calcular F_r y comprobar $F_r \leq \mu_s N$; si no se cumple, desliza con $F_r = \mu_k N$ y $\bar{a}$, α son independientes.
- Volcamiento contra deslizamiento: vuelca cuando la normal se va a una arista (N aplicada en el borde).

Momentos de inercia (respecto al centro de masa, eje perpendicular al plano del movimiento):

Cuerpo	$\bar{I}$
Barra delgada de longitud L	$\frac{1}{12}mL^2$ (por un extremo: $\frac{1}{3}mL^2$)
Disco o cilindro macizo de radio r	$\frac{1}{2}mr^2$
Aro o cilindro hueco de pared delgada	mr^2
Esfera maciza	$\frac{2}{5}mr^2$
Esfera hueca de pared delgada	$\frac{2}{3}mr^2$
Placa rectangular $a\times b$	$\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$

$$I = \bar{I} + md^2 \text{ (ejes paralelos)}, \qquad I = mk^2, \quad \bar{I} = m\bar{k}^2 \text{ (radio de giro)}$$

Energía del cuerpo rígido.

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2 = \tfrac{1}{2}I_O\omega^2 \text{ (eje fijo } O), \qquad U_{1\to 2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

Trabajo de un par constante: $U = M\,\Delta\theta$. La fricción en el punto de contacto de una rueda que no desliza no trabaja.